

5.1 Igualdades notables

- El **cuadrado de una suma** es igual al cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- El **cuadrado de una diferencia** es igual al cuadrado del primero, menos el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Una **suma por una diferencia** es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

EJERCICIOS DE IGUALDADES NOTABLES

1 Desarrolla:

a) $(3x + 5)^2$

b) $(2x - 7)^2$

c) $(3x + y)(3x - y)$

a) $(3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$

b) $(2x - 7)^2 = 4x^2 - 28x + 49$

c) $(3x + y)(3x - y) = 9x^2 - y^2$

2 Opera y simplifica:

$(4x + 9)^2 - (4x - 9)(4x + 9)$

$(4x + 9)^2 - (4x - 9)(4x + 9) = 16x^2 + 72x + 81 - (16x^2 - 81) =$

$= \cancel{16x^2} + 72x + 81 - \cancel{16x^2} + 81 = 72x + 162$

5.2 Factorización

Factorizar un polinomio consiste en expresarlo como producto de factores irreducibles.

EJERCICIOS DE FACTORIZACIÓN

3 Factoriza:

a) $49x^2 - 42x + 9$

b) $25x^3 + 40x^2 + 16x$

c) $5x^3 - 15x^2$

e) $x^2 - 7$

a) $49x^2 - 42x + 9 = (7x - 3)^2$

b) $25x^3 + 40x^2 + 16x = x(25x^2 + 40x + 16) = x(5x + 4)^2$

c) $5x^3 - 15x^2 = 5x^2(x - 3)$

e) $x^2 - 7 = (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$

4 Factoriza y simplifica:

a) $\frac{12x^3 + 28x^2}{3x^2 + 7x}$

b) $\frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 25}$

c) $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^3 - 9x}$

a) $\frac{12x^3 + 28x^2}{3x^2 + 7x} = \frac{4x^2 \cancel{(3x+7)}}{x \cancel{(3x+7)}} = 4x$

b) $\frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 25} = \frac{(x+5)^2}{\cancel{(x+5)}(x-5)} = \frac{x+5}{x-5}$

c) $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^3 - 9x} = \frac{x(x^2 - 6x + 9)}{x(x^2 - 9)} = \frac{\cancel{x}(x-3)^2}{\cancel{x}(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{x-3}{x+3}$

EJERCICIO DE LA REGLA DE RUFFINI

5 Divide por Ruffini:

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 6x + 2$$

entre

$$Q(x) = x + 3$$

	1	0	-5	6	2
-3		-3	9	-12	18
	1	-3	4	-6	20

Cociente: $C(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 6$; resto: $R = 20$

5.3 Teoremas del resto y del factor

• Teorema del resto

El resto que se obtiene al dividir el polinomio $P(x)$ entre el binomio $x - a$ es el valor numérico del polinomio para $x = a$

$$R = P(a)$$

• Teorema del factor

El polinomio $P(x)$ es divisible entre el binomio $x - a$ si $x = a$ es una raíz del polinomio $P(x)$; es decir $P(a) = 0$

PROBLEMAS DEL TEOREMA DEL RESTO Y DEL FACTOR

6 Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea 17

$$(x^4 + kx^3 - 2x + 7k) : (x + 3)$$

Entérate

Al dividir el polinomio $P(x) = x^4 + kx^3 - 2x + 7k$ entre $x + 3$, el resto es 17
Pregunta: ¿Cuánto debe valer k ?

Manos a la obra

Por el teorema del resto se ha de verificar que $P(-3) = 17$
 $(-3)^4 + k(-3)^3 - 2 \cdot (-3) + 7k = 17 \Rightarrow 81 - 27k + 6 + 7k = 17$
 $-20k = -70 \Rightarrow 20k = 70 \Rightarrow 2k = 7 \Rightarrow k = \frac{7}{2}$

Solución

$$k = \frac{7}{2}$$

7 Halla el valor de k para que el polinomio $x^4 - 5x^2 + kx - 1$ sea divisible entre el binomio $x - 2$

Entérate

El polinomio $P(x) = x^4 - 5x^2 + kx - 1$ debe ser divisible entre $x - 2$, es decir, el resto debe ser 0
Pregunta: ¿Cuánto debe valer k ?

Manos a la obra

Por el teorema del factor se ha de verificar que $P(2) = 0$
 $2^4 - 5 \cdot 2^2 + 2k - 1 = 0 \Rightarrow 16 - 20 + 2k - 1 = 0 \Rightarrow 2k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$

Solución

$$k = \frac{5}{2}$$

5. Operaciones con polinomios

PASO A PASO

1 Dados los polinomios:

$$P(x) = 8x^3 - 5x^2 + 1, Q(x) = 4x^2 - 2x + 3$$

calcula:

$$P(x) + Q(x), P(x) - Q(x), P(x) \cdot Q(x)$$

SOLUCIÓN:

5. Polinomios

Alba Maza Sánchez

Óscar Arias López

Paso a paso

Ejercicio 1

$$P(x) = 8x^3 - 5x^2 + 1;$$

$$Q(x) = 4x^2 - 2x + 3;$$

$$P(x) + Q(x) \rightarrow 8 \cdot x^3 - x^2 - 2 \cdot x + 4$$

$$P(x) - Q(x) \rightarrow 8 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 2$$

$$P(x) \cdot Q(x) \rightarrow 32 \cdot x^5 - 36 \cdot x^4 + 34 \cdot x^3 - 11 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 3$$

2 Desarrolla:

$$(2x - 7)^2$$

SOLUCIÓN:

Para escribir el paréntesis del tamaño de la fracción, en **Operaciones** elige **Paréntesis**.

$$\text{Ejercicio 2} \\ (2x - 7)^2 \rightarrow 4 \cdot x^2 - 28 \cdot x + 49$$

3 Factoriza:

$$25x^3 + 40x^2 + 16x$$

SOLUCIÓN:

$$\text{Ejercicio 3} \\ \text{factorizar}(25x^3 + 40x^2 + 16x) \rightarrow x \cdot (5 \cdot x + 4)^2$$

4 Simplifica:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^3 - 9x}$$

SOLUCIÓN:

$$\text{Ejercicio 4} \\ \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^3 - 9x} \rightarrow \frac{x-3}{x+3}$$

5 Opera y simplifica:

$$(4x + 9)^2 - (4x - 9)(4x + 9)$$

$$\text{Ejercicio 5} \\ (4x + 9)^2 - (4x - 9)(4x + 9) \rightarrow 72 \cdot x + 162$$

6 Divide $D(x) = 8x^5 - 6x^2 - 10$ entre $d(x) = 2x^2 + 5$

SOLUCIÓN:

$$\text{Ejercicio 6} \\ \begin{array}{r} 8x^5 - 6x^2 - 10 \quad | 2x^2 + 5 \rightarrow 8 \cdot x^5 - 6 \cdot x^2 - 10 \quad | 2 \cdot x^2 + 5 \\ \underline{50 \cdot x + 5} \\ 4 \cdot x^3 - 10 \cdot x - 3 \end{array}$$

$$C(x) = 4x^3 - 10x - 3$$

$$R(x) = 50x + 5$$

7 Calcula el valor numérico del polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7 \text{ para } x = -2, x = 0, x = 1$$

SOLUCIÓN:

$$\text{Ejercicio 7} \\ \begin{array}{l} P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7; \\ P(-2) \rightarrow -29 \\ P(0) \rightarrow 7 \\ P(1) \rightarrow 4 \end{array}$$

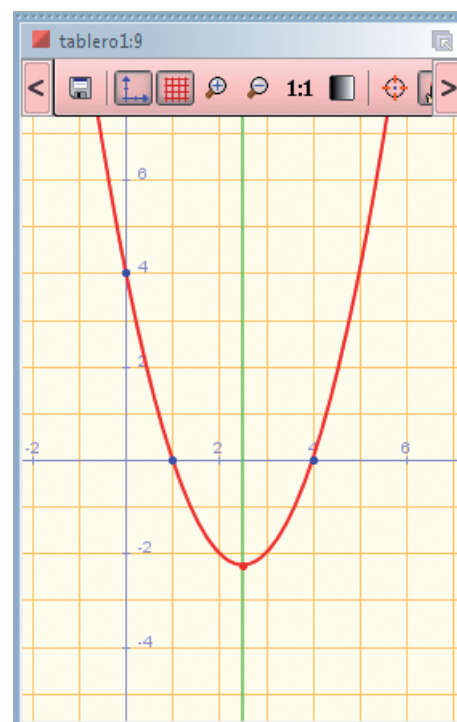
8 Representa la parábola $y = x^2 - 5x + 4$, y observando la gráfica calcula las raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 4$

SOLUCIÓN:

En **Operaciones** elige **representar**

$$\text{Ejercicio 8} \\ \text{representar}(x^2 - 5x + 4, \{ \text{curva} = \{ \text{color} = \text{rojo}, \text{anchura_linea} = 2 \} \});$$

Las raíces son $x = 1, x = 4$



Plantea los siguientes problemas con los tres apartados (Entérate, Manos a la obra y Solución) y resuélvelos con ayuda de Wiris:

- 9 Halla el valor de k para que el resto de la división $(x^4 + kx^3 - 2x + 7k) : (x + 3)$ sea 17

SOLUCIÓN:

Problema 9

a) Entérate

$$x^4 + kx^3 - 2x + 7k \quad | \quad x + 3$$

$$R = 17$$

Pregunta: halla k

b) Manos a la obra

$$P(x) = x^4 + k \cdot x^3 - 2x + 7k;$$

$$\text{resolver}(P(-3) = 17) \rightarrow \left\{ \left\{ k = \frac{7}{2} \right\} \right\}$$

c) Solución

$$k = \frac{7}{2}$$

- 10 Halla el valor de k para que el polinomio $x^4 - 5x^2 + kx - 1$ sea divisible entre $x - 2$

SOLUCIÓN:

Problema 10

a) Entérate

$$x^4 - 5x^2 + kx - 1 \quad | \quad x - 2$$

$$R = 0$$

Pregunta: halla k

b) Manos a la obra

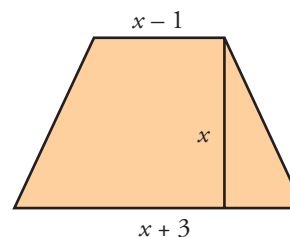
$$P(x) = x^4 - 5x^2 + k \cdot x - 1;$$

$$\text{resolver}(P(2) = 0) \rightarrow \left\{ \left\{ k = \frac{5}{2} \right\} \right\}$$

c) Solución

$$k = \frac{5}{2}$$

- 11 Expresa el área del trapecio de la siguiente figura:



SOLUCIÓN:

Problema 11

a) Entérate

Las dimensiones del trapecio son :

Base mayor : $x + 3$

Base menor : $x - 1$

Altura : x

Pregunta: Expresa el área.

b) Manos a la obra

$$A(x) = \frac{x + 3 + x - 1}{2} \cdot x \rightarrow x \mapsto x^2 + x$$

c) Solución

El área es $A(x) = x^2 + x$

ASÍ FUNCIONA

■ Sumar, restar y multiplicar polinomios

Se introducen los polinomios y se escribe la operación a efectuar.

■ Desarrollar la potencia de un polinomio

Se escribe directamente la potencia.

■ Factorizar un polinomio

Se utiliza la función: **factorizar(polynomio)**

■ Dividir polinomios

En **Operaciones** se elige **División euclidiana** y se escribe el dividendo y el divisor.

■ Calcular el valor numérico de un polinomio

Se escribe el polinomio y su valor para el número. Por ejemplo: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 17$; $P(2)$

■ Hallar las raíces de un polinomio gráficamente

En **Operaciones** se elige **representar**. Para ver las coordenadas de los puntos de corte con el eje X se selecciona **Valor** y se acerca el puntero del ratón a dichos puntos.

Para cambiar el color y el grosor de la gráfica se escribe entre llaves:

$$\{\text{curva} = \{\text{color} = \text{rojo}, \text{anchura_línea} = 2\}\}$$

Cuando se introduce un polinomio en Wiris para operar, es aconsejable escribir al final punto y coma (;) para que Wiris no repita el polinomio. Por ejemplo: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$;

PRACTICA CON WIRIS

Desarrolla:

12 $2x^3(3x - 1)^2 =$

13 $(2x + 7)^2(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) =$

Factoriza:

14 $3x^3 - 30x^2 + 75x =$

15 $x^2 - 11 =$

Factoriza y simplifica:

16 $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} =$

17 $\frac{x^3 - 4x}{x^3 + 4x^2 + 4x} =$

Dados los polinomios: $P(x) = 6x^3 + 5x - 2$, $Q(x) = 7x^2 - x + 3$, calcula:

18 $P(x) + Q(x) =$

19 $P(x) - Q(x) =$

20 $P(x) \cdot Q(x) =$

21 Divide $5x^5 - 13x^4 + 6x^2 - 4$ entre $x^2 - 2x - 1$ y haz la comprobación.

$C(x) =$

$R(x) =$

22 Divide $7x^3 - 31x + 1$ entre $x - 2$

$C(x) =$

$R(x) =$

23 Halla gráficamente las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 4$

Las raíces son:

Plantea los siguientes problemas con los tres apartados (Entérate, Manos a la obra y Solución) y resuélvelos con ayuda de Wiris:

24 Halla, sin hacer la división, el resto de dividir $x^3 - 5x^2 + 7$ entre $x - 3$

SOLUCIÓN:

25 Halla un polinomio sabiendo que al dividirlo entre $x^2 + x - 3$ da de cociente $2x^2 - 5x + 1$, y de resto, $x - 4$

SOLUCIÓN:

26 Comprueba, sin hacer la división, que el polinomio $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ es divisible entre $x - 2$

SOLUCIÓN:

27 Halla el valor de k para que el resto de la división $(x^3 - 2x^2 + kx - 5) : (x + 2)$ sea 7

SOLUCIÓN:

28 Halla el valor de k para que el polinomio $x^3 - 12x + k$ sea divisible entre $x - 3$

SOLUCIÓN:

PRACTICA CON BOLÍGRAFO Y PAPEL

Desarrolla:

$$12 \quad 2x^3(3x - 1)^2 =$$

$$13 \quad (2x + 7)^2(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) =$$

Factoriza:

$$14 \quad 3x^3 - 30x^2 + 75x =$$

$$15 \quad x^2 - 11 =$$

Factoriza y simplifica:

$$16 \quad \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} =$$

$$17 \quad \frac{x^3 - 4x}{x^3 + 4x^2 + 4x} =$$

Dados los polinomios: $P(x) = 6x^3 + 5x - 2$, $Q(x) = 7x^2 - x + 3$, calcula:

$$18 \quad P(x) + Q(x) =$$

$$19 \quad P(x) - Q(x) =$$

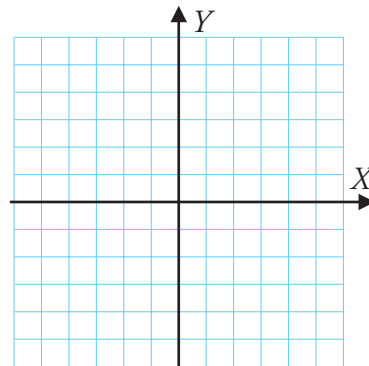
$$20 \quad P(x) \cdot Q(x) =$$

21 Divide $5x^5 - 13x^4 + 6x^2 - 4$ entre $x^2 - 2x - 1$ y haz la comprobación.

22 Divide $7x^3 - 31x + 1$ entre $x - 2$

23 Representa la función polinómica $P(x) = x^2 - 4$ haciendo una tabla de valores y halla sus raíces viendo la gráfica:

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



24 Halla, sin hacer la división, el resto de dividir $x^3 - 5x^2 + 7$ entre $x - 3$

Entérate

Manos a la obra

Solución



25 Halla un polinomio sabiendo que al dividirlo entre $x^2 + x - 3$ da de cociente $2x^2 - 5x + 1$, y de resto, $x - 4$

Entérate

Manos a la obra

Solución

26 Comprueba, sin hacer la división, que el polinomio $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ es divisible entre $x - 2$

Entérate

Manos a la obra

Solución

27 Halla el valor de k para que el resto de la división $(x^3 - 2x^2 + kx - 5) : (x + 2)$ sea 7

Entérate

Manos a la obra

Solución

28 Halla el valor de k para que el polinomio $x^3 - 12x + k$ sea divisible entre $x - 3$

Entérate

Manos a la obra

Solución