12 Límites y derivadas

12.1 Funciones definidas a trozos o por partes

Una **función está definida a trozos o por partes** si en distintos intervalos del dominio la función está definida por una fórmula diferente.

EJERCICIO DE FUNCIÓN DEFINIDA A TROZOS O POR PARTES

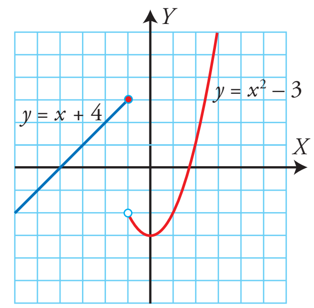
1 Representa la siguiente función definida a trozos o por partes y estudia su continuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Primero se representa la función $y = x + 4$, que es una semirrecta, pero solo cuando $x \leq -1$

En segundo lugar se representa la función $y = x^2 - 3$, que es un trozo de una parábola, pero solo cuando $x > -1$

Es discontinua en $x = -1$



12.2 Valor absoluto de una función

Para **representar una función definida por un valor absoluto,** se representa la función prescindiendo del valor absoluto, y en los intervalos donde la función sea negativa se hace la simétrica respecto del eje X

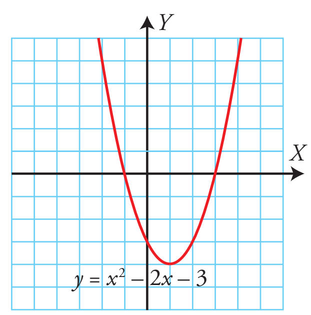
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

EJERCICIO PARA DIBUJAR EL VALOR ABSOLUTO DE UNA FUNCIÓN

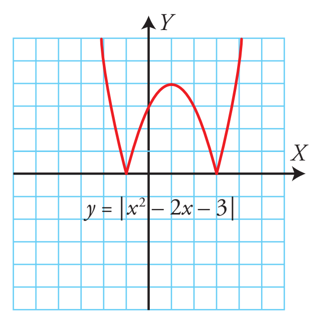
2 Representa la función:

$$y = |x^2 - 2x - 3|$$

Parábola: $y = x^2 - 2x - 3$



Valor absoluto: $y = |x^2 - 2x - 3|$



12.3 Límite de una función

Si una función es continua en un punto, el valor del límite coincide con el valor de la función. Es decir, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Para hallar el límite de una función continua en $x = a$, se sustituye dicho valor en $f(x)$ y se halla $f(a)$

Límite de una función polinómica cuando $x \to \pm\infty$

Un polinomio cuando $x \to \pm\infty$ es equivalente al término de mayor grado; el resto de términos comparativamente son muy pequeños y se pueden despreciar. El límite es $+\infty$ o $-\infty$, según resulte de operar el signo del coeficiente principal con la potencia. El cálculo se hace mentalmente.

Límite de una función racional en una raíz del numerador y del denominador

Por ser a raíz del numerador y del denominador, ambos son divisibles por $x - a$. Se evita la indeterminación dividiendo el numerador y el denominador entre $x - a$

Límite de una función racional cuando $x \to \pm\infty$

Se aplica el siguiente criterio:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \pm\infty & \text{si } n > m \end{cases}$$

EJERCICIOS DE LÍMITES

3 Calcula:

$$\lim_{x \to 3} (x - 1)$$

Como $f(x) = x - 1$, es una función continua:

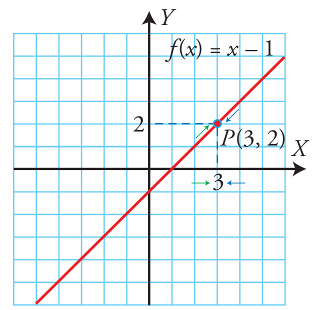
$$\lim_{x \to 3} (x - 1) = f(3) = 3 - 1 = 2$$

Representando la recta:

$$f(x) = x - 1$$

Se observa que cuando

$$x \to 3 \Rightarrow f(x) \to 2$$



4 Calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 - 3x^2 + x + 3)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 - 3x^2 + x + 3) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty^3 = -\infty$$

5 Calcula:

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 - 3x^2 + x + 3)$$

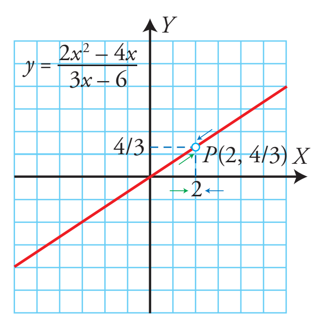
$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 - 3x^2 + x + 3) = \lim_{x \to -\infty} (-x)^3 = -(-\infty)^3 = +\infty$$

6 Calcula:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 4x}{3x - 6}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 4x}{3x - 6} = \frac{8 - 8}{6 - 6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{2x\cancel{(x - 2)}}{3\cancel{(x - 2)}} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{3} = \frac{4}{3}$$

La función es como la recta $y = 2x/3$, excepto que para $x = 2$ no está definida, le falta un punto.



7 Calcula:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 - 6x + 2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 - 6x + 2} = \frac{3}{2}$$ porque tienen el mismo grado.

12.4 Tabla de derivadas o reglas de derivación

Las letras u, v y w representan funciones de x, $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$

	Función	Derivada	Ejemplos	
Potenciales	$y = k$	$y' = 0$	$y = 7$	$y' = 0$
	$y = x$	$y' = 1$	$y = x$	$y' = 1$
	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = x^5$	$y' = 5x^4$
	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}u'$	$y = (3x-2)^5$	$y' = 15(3x-2)^4$
Exponenciales	$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^x$	$y' = e^x$
	$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = e^{3x-2}$	$y' = 3e^{3x-2}$
Logarítmicas	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = \ln(2x+3)$	$y' = \frac{2}{2x+3}$
Operaciones	$y = ku$	$y' = ku'$	$y = 4x^7$	$y' = 28x^6$
	$y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$	$y = x^4 + 5x^3 - 7x^2$	$y' = 4x^3 + 15x^2 - 14x$
	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$	$y = x^7e^{4x}$	$y = 7x^6e^{4x} + 4x^7e^{4x}$
	$y = \frac{u}{v}$	$y = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$y = \frac{e^x}{x}$	$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$

12.5 Interpretación geométrica de la derivada

La **derivada** de una función en un punto es la **pendiente** de la recta tangente a la curva en ese punto.

La aplicación inmediata de la interpretación geométrica es que las rectas tangente y normal a una curva $y = f(x)$ en $P(a, f(a))$ en su forma punto-pendiente son:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \qquad y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$$

EJERCICIO DE RECTA TANGENTE Y NORMAL A UNA CURVA

8 Dada la parábola:

$$y = -x^2 + 4$$

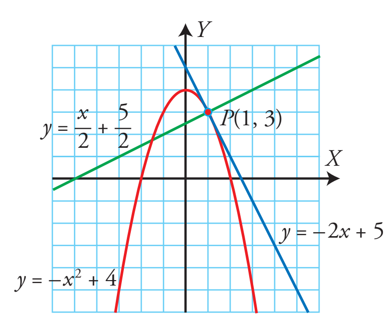
halla las rectas tangente y normal para $x = 1$

a) Se calcula el punto: $x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow P(1, 3)$

b) Se hallan las pendientes: $f'(x) = -2x \Rightarrow m = f'(1) = -2 \Rightarrow m_\perp = \frac{1}{2}$

c) La recta tangente es: $y = -2(x-1) + 3 \Rightarrow y = -2x + 5$

d) La recta normal es: $y = \frac{1}{2}(x-1) + 3 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$



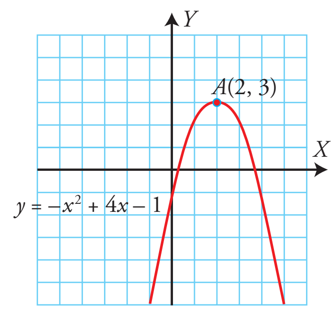
12.6 Máximosy mínimos relativos

Un **máximo relativo de una función** es un punto en que la función es mayor que en los puntos cercanos, y un **mínimo relativo de una función** es un punto en que la función es menor que en los puntos cercanos.

EJERCICIO PARA HALLAR LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS

9 Halla los máximos y mínimos relativos de la función:

$$y = -x^2 + 4x - 1$$

Procedimiento	
a) Se calcula la primera derivada, $f'(x)$	$f'(x) = -2x + 4$
b) Se resuelve la ecuación, $f'(x) = 0$	$-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$
c) Se sustituye la raíz o raíces de $f'(x) = 0$ en la función inicial $y = f(x)$ y se obtienen los posibles máximos y mínimos relativos.	$x = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(2, 3)$
d) Se halla la segunda derivada, $f''(x)$	$f''(x) = -2$
e) Se sustituyen las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos en la segunda derivada, $f''(x)$ • Si $f''(x) < 0 \Rightarrow$ máximo relativo. • Si $f''(x) > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo.	$f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow A(2, 3)$ Máximo relativo. 

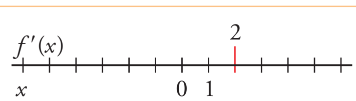
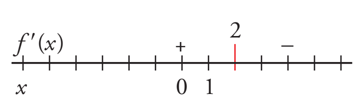
12.7 Monotonía o crecimiento

Si $f'(x) > 0$, la función $f(x)$ es creciente; si $f'(x) < 0$, la función $f(x)$ es decreciente.

EJERCICIO PARA HALLAR LA MONOTONÍA O CRECIMIENTO

10 Halla el crecimiento de:

$$y = -x^2 + 4x - 1$$

Procedimiento	Ejemplo:
a) Se calculan los máximos y mínimos relativos.	Es la función del ejercicio anterior. $A(2, 3)$ Máximo relativo.
b) Se hallan las discontinuidades.	No hay.
c) Se representan en la recta real $\mathbb{R}$ las abscisas de los máximos y mínimos relativos, y las discontinuidades de la derivada.	
d) Se prueba un punto de uno de los intervalos en la primera derivada; solamente se considera el signo. Los intervalos consecutivos cambian de signo si la multiplicidad de la raíz o discontinuidad de la derivada es impar. Si es par, no cambia.	$f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow y'(0) = +$ 
e) Se escriben los intervalos de crecimiento (↗)	Creciente (↗): $(-\infty, 2)$
f) Se escriben los intervalos de decrecimiento (↘)	Decreciente (↘): $(2, +\infty)$

12. Límites y derivadas

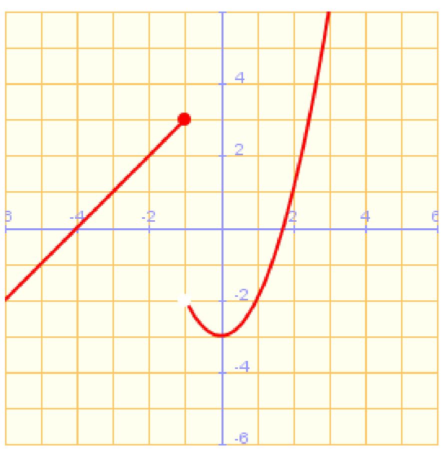
PASO A PASO

1 Representa la siguiente función definida a trozos o por partes y estudia su continuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

```
12. Límites y derivadas
Alba Maza Sánchez
Óscar Arias López
Paso a paso
Ejercicio 1
tablero(punto(0, 0), 12, 12);
dibujar(x + 4, -∞..−1, {color = rojo, anchura_línea = 2});
dibujar(punto(−1, 3), {color = rojo, tamaño_punto = 8});
dibujar(x² − 3, −1..+∞, {color = rojo, anchura_línea = 2});
dibujar(punto(−1, −2), {color = blanco, tamaño_punto = 8});
Es discontinua en x = −1
```

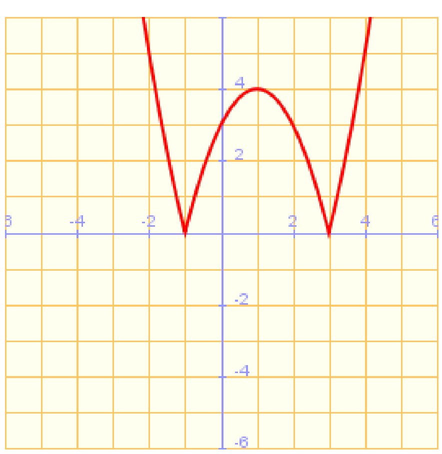


2 Representa la función:

$$y = |x^2 - 2x - 3|$$

SOLUCIÓN:

```
Ejercicio 2
tablero(punto(0, 0), 12, 12);
dibujar(|x² − 2x − 3|, {color = rojo, anchura_línea = 2});
```

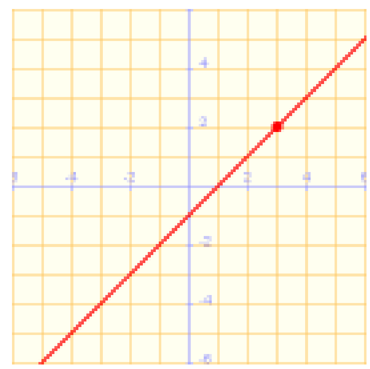


3 Calcula el siguiente límite y representa la función correspondiente:

$$\lim_{x \to 3} (x - 1)$$

SOLUCIÓN:

```
Ejercicio 3
f(x) = x − 1;
a = 3;
lím f(x) → 2
x→a
P = punto(a, f(a)) → (3,2)
tablero(punto(0, 0), 12, 12);
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2});
dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8});
Se observa que cuando x → 3, y → 2
```

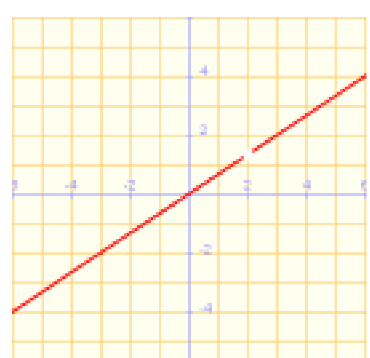


4 Calcula el siguiente límite y representa la función correspondiente:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 4x}{3x - 6}$$

SOLUCIÓN:

```
Ejercicio 4
f(x) = (2x² − 4x)/(3x − 6);
a = 2;
lím f(x) → 4/3
x→a
P = punto(a, f(a)) → (2, 4/3)
tablero(punto(0, 0), 12, 12);
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2});
dibujar(P, {color = blanco, tamaño_punto = 8});
Se observa que cuando x → 2, y → 4/3
```



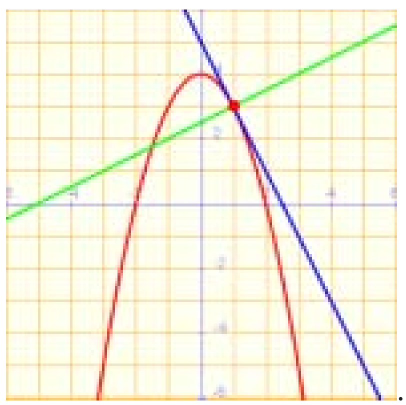
5 Dada la parábola:

$$y = -x^2 + 4$$

halla las rectas tangente y normal para $x = 1$

SOLUCIÓN:

```
Ejercicio 5
f(x) = −x² + 4;
a = 1;
P = punto(a, f(a)) → (1,3)
t(x) = f'(a)·(x − a) + f(a) → x↦−2·x+5
n(x) = − 1/f'(a) ·(x − a) + f(a) → x↦ 1/2 ·x+ 5/2
tablero(punto(0, 0), 12, 12);
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2});
dibujar(t(x), {color = azul, anchura_linea = 2});
dibujar(n(x), {color = verde, anchura_linea = 2});
dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8});
```



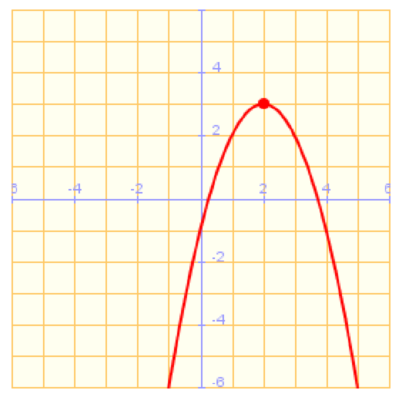
6 Halla los máximos y mínimos relativos de la función:

$$y = -x^2 + 4x - 1$$

Estudia su monotonía o crecimiento.

SOLUCIÓN:

```
Ejercicio 6
f(x) = − x² + 4x − 1;
f'(x) → −2·x+4
resolver(f'(x) = 0) → {{x=2}}
f(2) → 3
f''(2) → −2
Máximo relativo : A(2, 3)
tablero(punto(0, 0), 12, 12);
dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_linea = 2});
dibujar(punto(2, 3), {color = rojo, tamaño_punto = 8});
Creciente : (−∞, 2)
Decreciente : (2, +∞)
```



ASÍ FUNCIONA

En las gráficas dibujadas con Wiris de las funciones definidas a trozos, después de dibujar la función hay que dibujar en rojo los puntos que están y en blanco los que no están.

Funciones especiales

y = suelo(x) es y = Ent(x)

y = decimal(x) es y = Dec(x)

y = signo(x) es y = Signo(x)

Para introducir la función **valor absoluto** en Símbolos, se elige **Valor absoluto.**

Funciones definidas a trozos

Para dibujar una función en un intervalo se escribe la función, una coma y los límites del intervalo separados por dos puntos alineados horizontalmente.

Cálculo de límites

Para hallar un límite en Análisis se elige la opción **Límite.** Los símbolos **Infinito positivo,** **Infinito negativo,** **Infinito sin signo** están en Símbolos.

Cálculo de derivadas

Se introduce la función como $f(x)$ y se escribe $f'(x)$ o se utiliza de Análisis la herramienta **Derivar.**

PRACTICA CON WIRIS

Representa las siguientes funciones y estudia su continuidad:

7 $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

8 $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ -\dfrac{x}{2} + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

9 $f(x) = |-x^2 + 3|$

10 $f(x) = |-x^2 - x + 2|$

11 $f(x) = \text{Ent}(x)$

12 $f(x) = \text{Dec}(x)$

Halla los límites siguientes y dibuja la función para comprobarlo:

13 $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 1) =$

14 $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x - 5) =$

15 $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^5 + 5x^3 - 4x) =$

16 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} =$

17 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x - 8}{x^2 - 4} =$

18 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{1 - x^2} =$

19 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{x^2 + 1} =$

20 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 5}{x^2 + 1} =$

Calcula las derivadas de las funciones siguientes:

21 $y = 7x^2 - 5x + 4 \Rightarrow y' =$

22 $y = 6x^5 + 7x^3 + x \Rightarrow y' =$

23 $y = (2x - 5)^3 \Rightarrow y' =$

24 $y = e^{5x-3} \Rightarrow y' =$

25 $y = \ln(x^2 - 6x + 5) \Rightarrow y' =$

26 $y = x^2 e^x \Rightarrow y' =$

27 $y = x^3 \ln x \Rightarrow y' =$

28 $y = \dfrac{4x + 1}{2x - 3} \Rightarrow y' =$

29 Halla las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 - 4x + 1$ para $x = 3$. Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

a) Ecuación de la recta tangente:

$y =$

b) Ecuación de la recta normal:

$y =$

30 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2 - 4x$. Determina el crecimiento y dibújala.

- Máximo relativo:
- Mínimo relativo:
- Creciente:
- Decreciente:

31 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = 2x^2 - 12x + 14$. Determina el crecimiento y dibújala.

- Máximo relativo:
- Mínimo relativo:
- Creciente:
- Decreciente:

Plantea el siguiente problema con los tres apartados y resuélvelo con ayuda de Wiris:

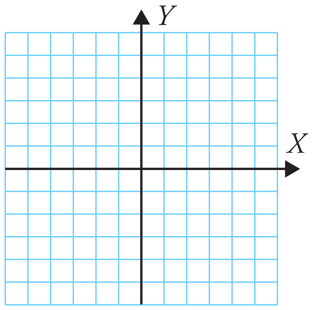
32 El número de cientos de águilas en una reserva viene dado por la siguiente fórmula $f(t) = \dfrac{3t + 5}{t + 1}$ halla el número de águilas que hay en el instante inicial y las que hay al cabo de 50 años. Con el transcurso del tiempo, ¿a quién tiende el número de águilas. Se supone que están en vías de extinción si bajan de 100 ejemplares? ¿Están en vías de extinción? Representa la función para $t \geq 0$

SOLUCIÓN:

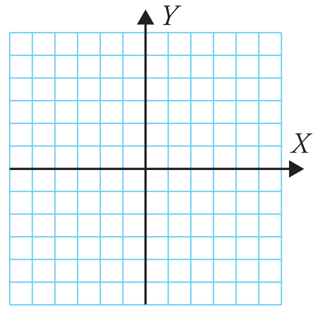
PRACTICA CON BOLÍGRAFO Y PAPEL

Representa las siguientes funciones y estudia su continuidad:

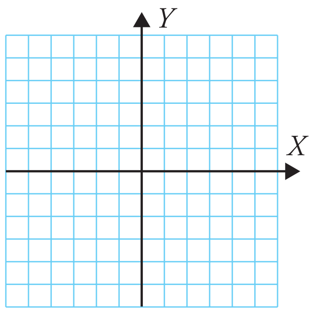
7 $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



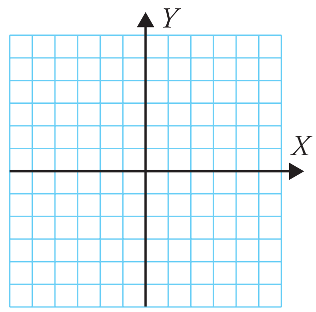
8 $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ -\dfrac{x}{2} + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$



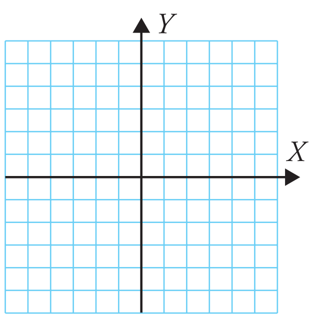
9 $f(x) = |-x^2 + 3|$



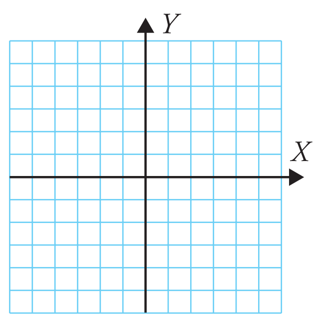
10 $f(x) = |-x^2 - x + 2|$

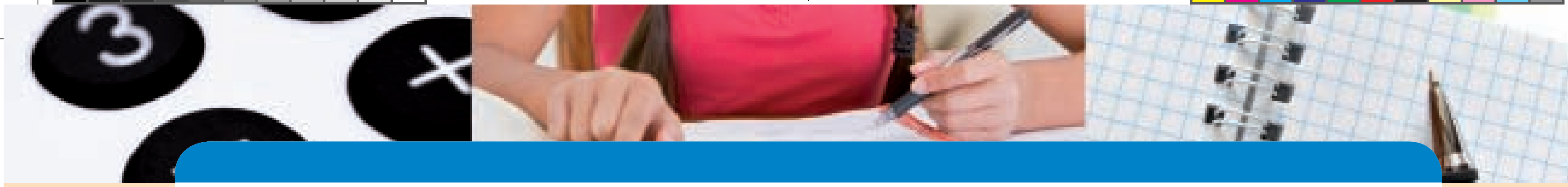


11 $f(x) = \text{Ent}(x)$



12 $f(x) = \text{Dec}(x)$





Halla los límites siguientes:

13 $$\lim_{x \to 2} (3x - 1) =$$

14 $$\lim_{x \to -\infty} (x^2 + x - 5) =$$

15 $$\lim_{x \to +\infty} (-x^5 + 5x^3 - 4x) =$$

16 $$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} =$$

17 $$\lim_{x \to 2} \frac{4x - 8}{x^2 - 4} =$$

18 $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{1 - x^2} =$$

19 $$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x^2 + 1} =$$

20 $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5}{x^2 + 1} =$$

Calcula las derivadas de las funciones siguientes:

21 $y = 7x^2 - 5x + 4$

22 $y = 6x^5 + 7x^3 + x$

23 $y = (2x - 5)^3$

24 $y = e^{5x-3}$

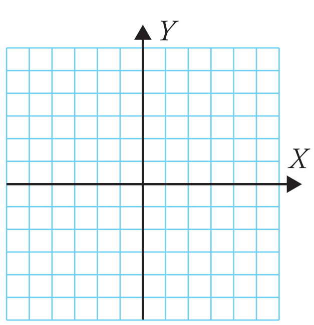
25 $y = \ln (x^2 - 6x + 5)$

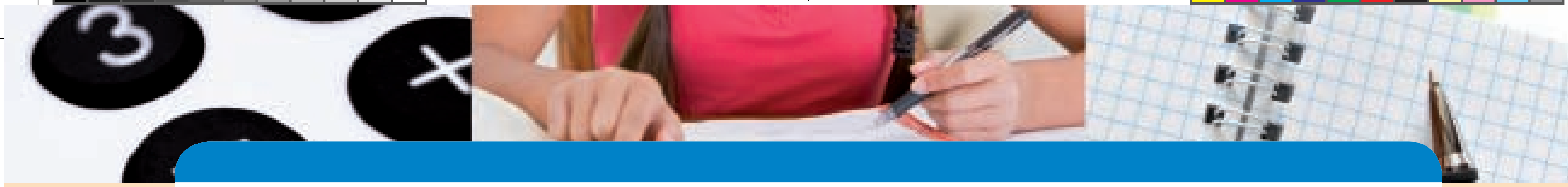
26 $y = x^2 e^x$

27 $y = x^3 \ln x$

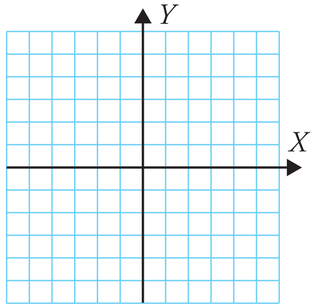
28 $y = \dfrac{4x + 1}{2x - 3}$

29 Halla las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 - 4x + 1$ para $x = 3$. Dibuja la función y las rectas tangente y normal.

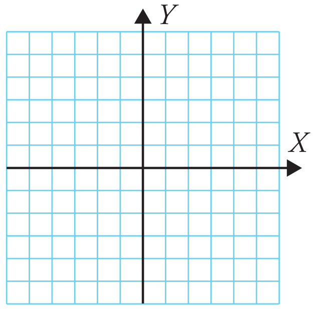




30 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = -x^2 - 4x$. Determina el crecimiento y dibújala.



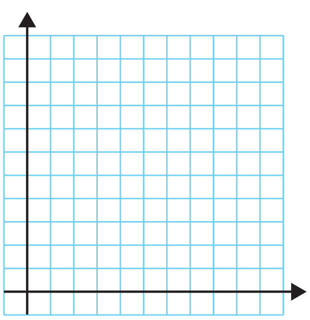
31 Halla los máximos y mínimos relativos de la función $y = 2x^2 - 12x + 14$. Determina el crecimiento y dibújala.



32 El número de cientos de águilas en una reserva viene dado por la siguiente fórmula $f(t) = \dfrac{3t + 5}{t + 1}$ halla el número de águilas que hay en el instante inicial y las que hay al cabo de 50 años. Con el transcurso del tiempo, ¿a quién tiende el número de águilas. Se supone que están en vías de extinción si bajan de 100 ejemplares? ¿Están en vías de extinción? Representa la función para $t \geq 0$

Entérate

Manos a la obra



Solución